KOMPLETNE KOMPLEKSNE PLOSKVE V KROGLI

Josip Globevnik

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana

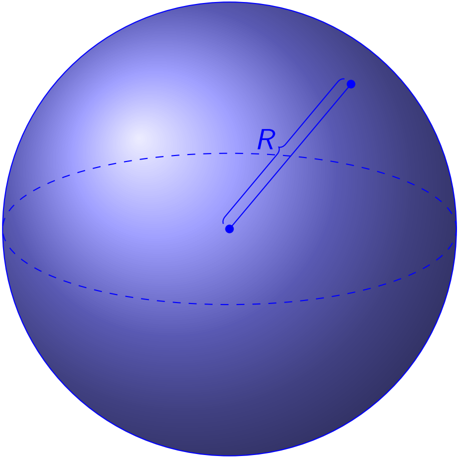
November 23, 2016

Krogla

Če je O točka v prostoru in R pozitivno število, je **krogla s središčem v O in polmerom** R množica vseh tistih točk v prostoru, ki so od O oddaljene za manj kot R.

Krogla

Če je O točka v prostoru in R pozitivno število, je **krogla s središčem v O in polmerom** R množica vseh tistih točk v prostoru, ki so od O oddaljene za manj kot R.

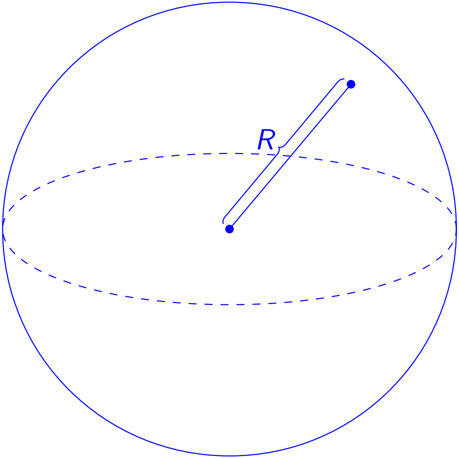


Sfera

Če je, kot prej, O točka v prostoru in R pozitivno število, je **sfera s središčem v O in polmerom** R množica vseh tistih točk v prostoru, ki so od O oddaljene natanko R.

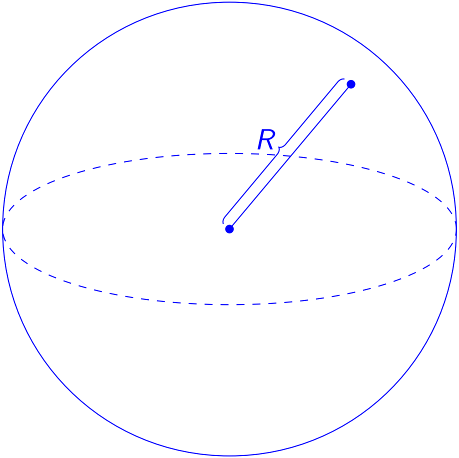
Sfera

Če je, kot prej, O točka v prostoru in R pozitivno število, je **sfera s središčem v O in polmerom** R množica vseh tistih točk v prostoru, ki so od O oddaljene natanko R.



Sfera

Če je, kot prej, O točka v prostoru in R pozitivno število, je **sfera s središčem v O in polmerom** R množica vseh tistih točk v prostoru, ki so od O oddaljene natanko R.

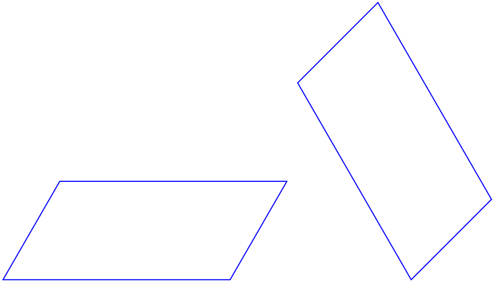


Predstavljamo si jo lahko kot milnico v milnem mehurčku.

Najenostavnejši primeri ploskev

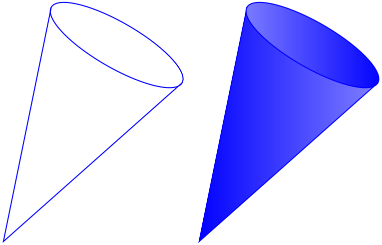
Najenostavnejši primeri ploskev

Najenostavnejši primeri ploskev - kosi ravnin



Bolj komplicirani primeri ploskev - sfere, kosi sfer, plašč stožca

Bolj komplicirani primeri ploskev - sfere, kosi sfer, plašč stožca



Kaj pravzaprav ploskev sploh je?

Kaj pravzaprav ploskev sploh je?

Če si predstavljamo, da smo majhna pikica na ploskvi, se nam bo košček ploskve blizu nas zdel skoraj raven (morda bo tudi čisto raven, če smo na koščku ravnine).

Kaj pravzaprav ploskev sploh je?

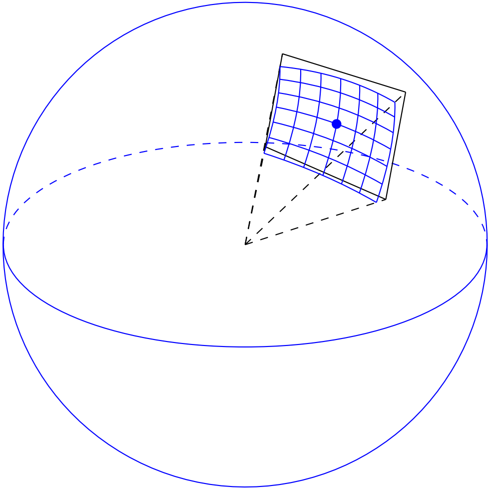
Če si predstavljamo, da smo majhna pikica na ploskvi, se nam bo košček ploskve blizu nas zdel skoraj raven (morda bo tudi čisto raven, če smo na koščku ravnine). Kot da stojimo na koščku ravnine, ki je blizu nas čisto malo upognjen, deformiran.

Kaj pravzaprav ploskev sploh je?

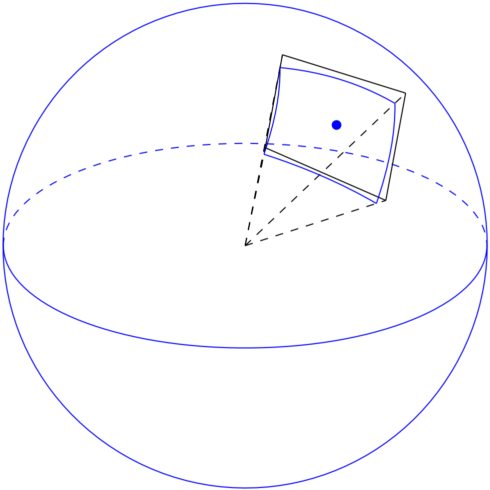
Če si predstavljamo, da smo majhna pikica na ploskvi, se nam bo košček ploskve blizu nas zdel skoraj raven (morda bo tudi čisto raven, če smo na koščku ravnine). Kot da stojimo na koščku ravnine, ki je blizu nas čisto malo upognjen, deformiran.

Ploskev je tak geometrijski objekt (t.j. taka množica točk v prostoru), ki blizu vsake svoje točke izgleda kot malo (ali sploh nič) deformiran košček ravnine.

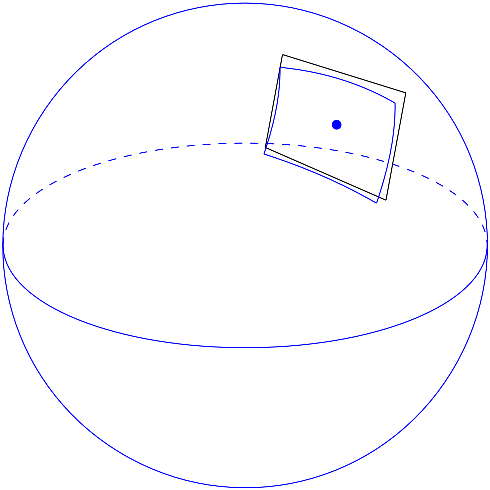
Košček sfere



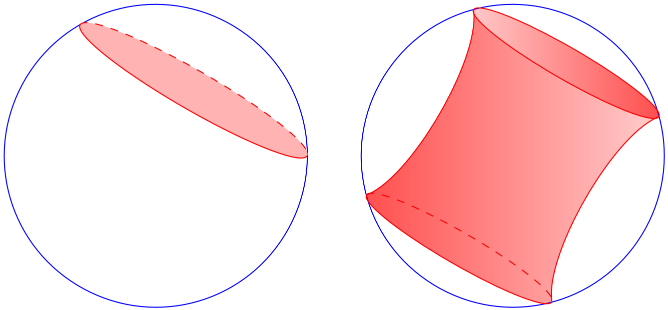
Košček sfere



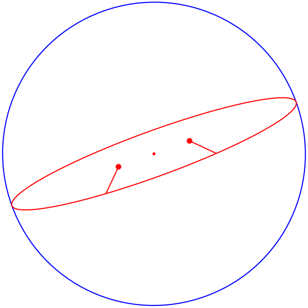
KoščEk sfere



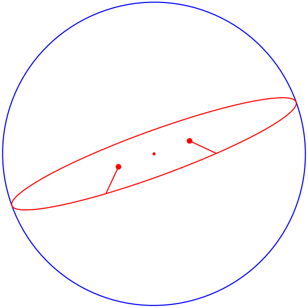
Podaljševanje dolžin poti do roba, kompletne ploskve



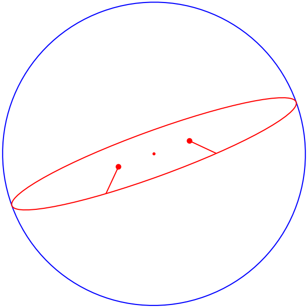
Dva primera ploskev v krogli, pripeta na sfero



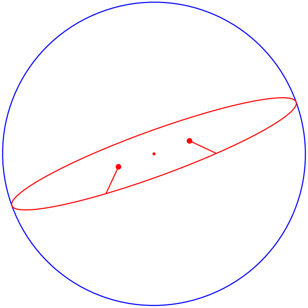
Raven disk, pripet na sfero.



Raven disk, pripet na sfero.
Iz vsake njegove točke je mogoče priti do roba po njem po poti končne dolžine.



Raven disk, pripet na sfero.
Iz vsake njegove točke je mogoče priti do roba po njem po poti končne dolžine. Nakrajša taka pot je kar ravna pot.



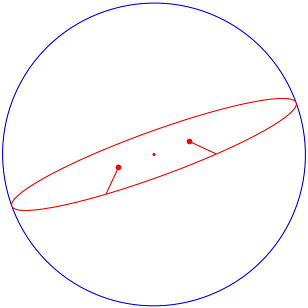
Raven disk, pripet na sfero.
Iz vsake njegove točke je mogoče priti do roba po njem po poti končne dolžine. Nakrajša taka pot je kar ravna pot.
Tudi v drugem primeru zgoraj je mogoče iz vsake točke ploskve priti po njej do roba po poti končne dolžine.

Poskus gubanja

Kako bi dolžine poti do roba povečali?

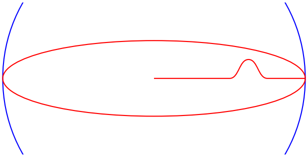
Poskus gubanja

Kako bi dolžine poti do roba povečali? Recimo da spet začnemo z ravnim diskom in želimo, da poti do roba postanejo daljše. Kaj bi naredili?

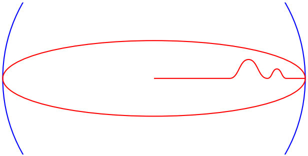


Poskusili bi ga zgubati.

Krivuljo z valčkom kot na sliki zavrtimo okoli vertikalne osi, ki gre skozi središče kroga. Ploskev, ki jo popiše, je disk z eno gubo.

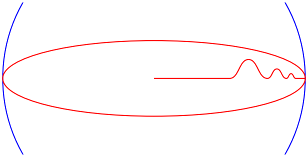


Krivuljo z valčkom kot na sliki zavrtimo okoli vertikalne osi, ki gre skozi središče kroga. Ploskev, ki jo popiše, je disk z eno gubo.

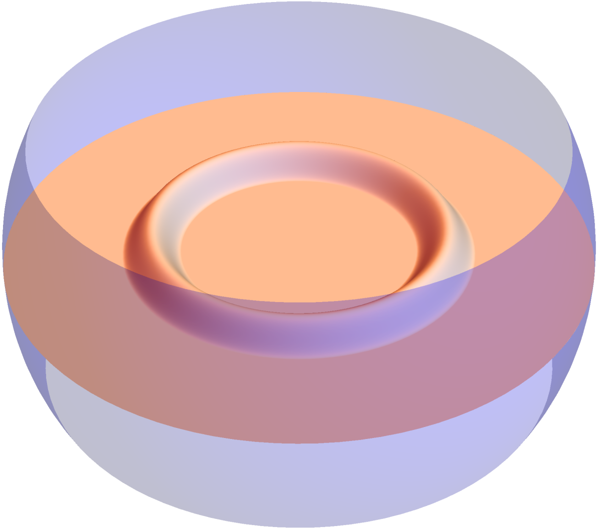


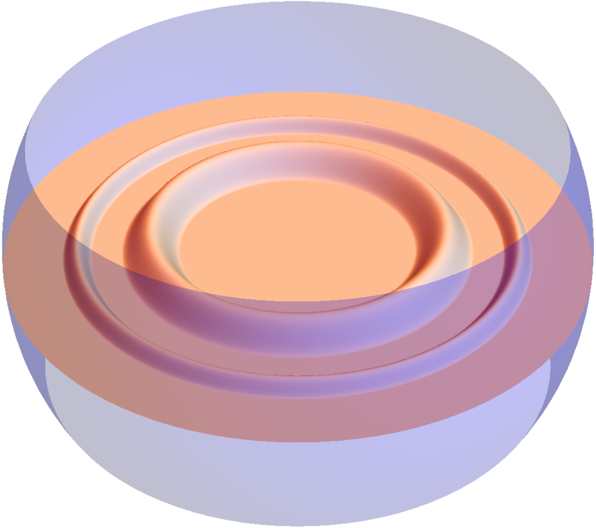
Dodamo še en valček in pri vrtenju dobimo disk z dvema gubama in tako nadaljujemo.

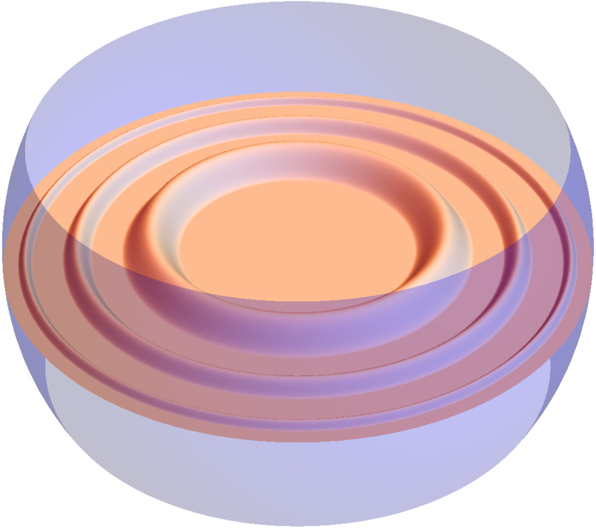
Krivuljo z valčkom kot na sliki zavrtimo okoli vertikalne osi, ki gre skozi središče kroga. Ploskev, ki jo popiše, je disk z eno gubo.



Dodamo še en valček in pri vrtenju dobimo disk z dvema gubama in tako nadaljujemo. Slike zaporedja zgubanih diskov izgledajo takole







Želja: zgubati ploskev tako, da bo njen rob postal neskončno oddaljen, da bo ploskev torej postala t.i. kompletna ploskev

Želja: zgubati ploskev tako, da bo njen rob postal neskončno oddaljen, da bo ploskev torej postala t.i. kompletna ploskev

Dodajamo nove in nove valove in dolžine poti do roba bodo postajale vedno daljše.

Želja: zgubati ploskev tako, da bo njen rob postal neskončno oddaljen, da bo ploskev torej postala t.i. kompletna ploskev

Dodajamo nove in nove valove in dolžine poti do roba bodo postajale vedno daljše.

Če višine dodajanih valov - gub ne padajo prehitro, bomo v takem neskončnem procesu dobili ploskev z neskončno valovi, pri kateri bo rob neskončno daleč.

Želja: zgubati ploskev tako, da bo njen rob postal neskončno oddaljen, da bo ploskev torej postala t.i. kompletna ploskev

Dodajamo nove in nove valove in dolžine poti do roba bodo postajale vedno daljše.

Če višine dodajanih valov - gub ne padajo prehitro, bomo v takem neskončnem procesu dobili ploskev z neskončno valovi, pri kateri bo rob neskončno daleč. Tako ploskev bomo imenovali kompletna ploskev.

Želja: zgubati ploskev tako, da bo njen rob postal neskončno oddaljen, da bo ploskev torej postala t.i. kompletna ploskev

Dodajamo nove in nove valove in dolžine poti do roba bodo postajale vedno daljše.

Če višine dodajanih valov - gub ne padajo prehitro, bomo v takem neskončnem procesu dobili ploskev z neskončno valovi, pri kateri bo rob neskončno daleč. Tako ploskev bomo imenovali kompletna ploskev. Opišimo to z besedami:

Želja: zgubati ploskev tako, da bo njen rob postal neskončno oddaljen, da bo ploskev torej postala t.i. kompletna ploskev

Dodajamo nove in nove valove in dolžine poti do roba bodo postajale vedno daljše.

Če višine dodajanih valov - gub ne padajo prehitro, bomo v takem neskončnem procesu dobili ploskev z neskončno valovi, pri kateri bo rob neskončno daleč. Tako ploskev bomo imenovali kompletna ploskev. Opišimo to z besedami:

Definicija Ploskev v krogli, pritrjeno na rob krogle, imenujemo **kompletna ploskev**, če točka, ki se s konstantno hitrostjo giblje po ploskvi, nikoli ne more priti do roba,

Želja: zgubati ploskev tako, da bo njen rob postal neskončno oddaljen, da bo ploskev torej postala t.i. kompletna ploskev

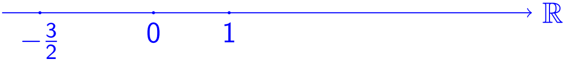
Dodajamo nove in nove valove in dolžine poti do roba bodo postajale vedno daljše.

Če višine dodajanih valov - gub ne padajo prehitro, bomo v takem neskončnem procesu dobili ploskev z neskončno valovi, pri kateri bo rob neskončno daleč. Tako ploskev bomo imenovali kompletna ploskev. Opišimo to z besedami:

Definicija Ploskev v krogli, pritrjeno na rob krogle, imenujemo **kompletna ploskev**, če točka, ki se s konstantno hitrostjo giblje po ploskvi, nikoli ne more priti do roba, z drugimi besedami, po poti končne dolžine nikoli ne moremo priti do roba ploskve.

Realna števila, kompleksna števila

Običajnim številom, s katerimi računamo, n.pr. $1, -2/3, \sqrt{2}, \pi$ pravimo realna števila in si jih si lahko predstavljamo kot točke na številski premici, ki jo označimo z R. Pravimo jim realna števila



S kompleksnimi števili smo se srečali v srednji šoli, ko smo reševali kvadratne enačbe, n.pr

$$x^2 = -1.$$

S kompleksnimi števili smo se srečali v srednji šoli, ko smo reševali kvadratne enačbe, n.pr

$$x^2 = -1.$$

Ker takega realnega števila, katerega kvadrat je negativno število, ni, zgornja enačba med realnimi števili nima rešitev.

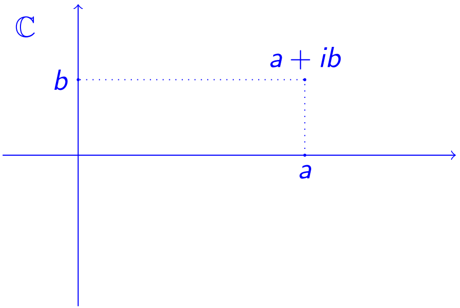
S kompleksnimi števili smo se srečali v srednji šoli, ko smo reševali kvadratne enačbe, n.pr

$$x^2 = -1.$$

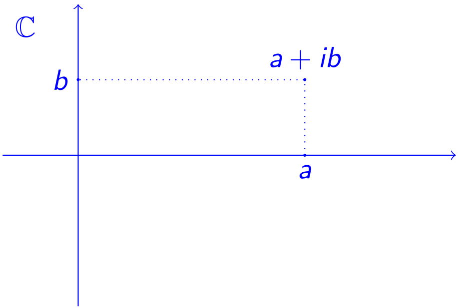
Ker takega realnega števila, katerega kvadrat je negativno število, ni, zgornja enačba med realnimi števili nima rešitev.

Želeli pa smo, da je kvadratna enačba vedno rešljiva, in smo zato uvedli tako imenovano **imaginarno enoto** i in z njo **kompleksna števila**, t.j. števila oblike $a + ib$, kjer sta a, b realni števili, i pa imaginarna enota, za katero velja, da je $i^2 = -1$.

Kompleksna števila si predstavljamo kot točke v ravnini



Kompleksna števila si predstavljamo kot točke v ravnini



To ravnino kompleksnih števil imenujemo **kompleksna ravnina** in jo označimo s $\mathbb{C}$.

N-dimenzionalen kompleksen prostor

N-dimenzionalen kompleksen prostor

Objekti, o katerih bomo govorili sedaj, bodo živeli v N-dimenzionalnem kompleksnem prostoru C^N,

N-dimenzionalen kompleksen prostor

Objekti, o katerih bomo govorili sedaj, bodo živeli v N-dimenzionalnem kompleksnem prostoru C^N, t.j. v prostoru N-teric kompleksnih števil. Tega si lahko predstavljamo, ga "vidimo" le, ko je $N = 1$.

N-dimenzionalen kompleksen prostor

Objekti, o katerih bomo govorili sedaj, bodo živeli v N-dimenzionalnem kompleksnem prostoru C^N, t.j. v prostoru N-teric kompleksnih števil. Tega si lahko predstavljamo, ga "vidimo" le, ko je $N = 1$. Tedaj je $C^N = C^1 = C$ torej kar zgoraj narisana kompleksna ravnina.

N-dimenzionalen kompleksen prostor

Objekti, o katerih bomo govorili sedaj, bodo živeli v N-dimenzionalnem kompleksnem prostoru C^N, t.j. v prostoru N-teric kompleksnih števil. Tega si lahko predstavljamo, ga "vidimo" le, ko je $N = 1$. Tedaj je $C^N = C^1 = C$ torej kar zgoraj narisana kompleksna ravnina.

Že v dimenziji $N = 2$ pa vizuelne predstave ni več. Vsaka točka prostora $C^N = C^2$ je tedaj par kompleksnih števil $(z_1, z_2) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$,

N-dimenzionalen kompleksen prostor

Objekti, o katerih bomo govorili sedaj, bodo živeli v N-dimenzionalnem kompleksnem prostoru C^N, t.j. v prostoru N-teric kompleksnih števil. Tega si lahko predstavljamo, ga "vidimo" le, ko je $N = 1$. Tedaj je $C^N = C^1 = C$ torej kar zgoraj narisana kompleksna ravnina.

Že v dimenziji $N = 2$ pa vizuelne predstave ni več. Vsaka točka prostora $C^N = C^2$ je tedaj par kompleksnih števil $(z_1, z_2) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$, torej rabimo četverico (a_1, b_1, a_2, b_2) realnih števil, da jo opišemo. Take točke si v našem običajnem prostoru, kjer je vsaka točka določena s tremi števili (koordinatami), ne moremo predstavljati.

Kompleksne ploskve v C^2

Kompleksne ploskve v C^2

Podobno, kot smo povedali, kaj so običajne ploskve, bomo rekli tudi tukaj:

Kompleksne ploskve v C^2

Podobno, kot smo povedali, kaj so običajne ploskve, bomo rekli tudi tukaj:

Kompleksna ploskev v C^2 je tak geometrijski objekt (t.j. taka množica točk v prostoru C^2), ki blizu vsake svoje točke izgleda kot malo (ali sploh nič) deformiran košček kompleksne ravnine.

Glavni rezultat

Glavni rezultat

Glavni rezultat, ki naj bi ga predstavili in ki ga lahko opišemo s pojmi, omenjenemi zgoraj, je tale

Glavni rezultat

Glavni rezultat, ki naj bi ga predstavili in ki ga lahko opišemo s pojmi, omenjenemi zgoraj, je tale

Izrek V krogli v prostoru C^2 obstaja kompletna kompleksna ploskev.

Glavni rezultat

Glavni rezultat, ki naj bi ga predstavili in ki ga lahko opišemo s pojmi, omenjenemi zgoraj, je tale

Izrek V krogli v prostoru C^2 obstaja kompletna kompleksna ploskev.

Pravzaprav je glavni rezultat splošnejši

IZREK Za vsak $N \geq 2$ v krogli v prostoru C^N obstaja kompletna kompleksna ploskev največje možne dimenzije.

IZREK Za vsak $N \geq 2$ v krogli v prostoru C^N obstaja kompletna kompleksna ploskev največje možne dimenzije.

Ta izrek reši problem, postavljen leta 1977.

IZREK Za vsak $N \geq 2$ v krogli v prostoru C^N obstaja kompletna kompleksna ploskev največje možne dimenzije.

Ta izrek reši problem, postavljen leta 1977.

25 strani dolga razprava z dokazom - opisom konstrukcije take ploskve je bila objavljena v prestižni reviji "Annals of Mathematics".

LEPA HVALA ZA VAŠO POZORNOST!