

Konveksnost in polinomska optimizacija

Igor Klep¹, Janez Povh²

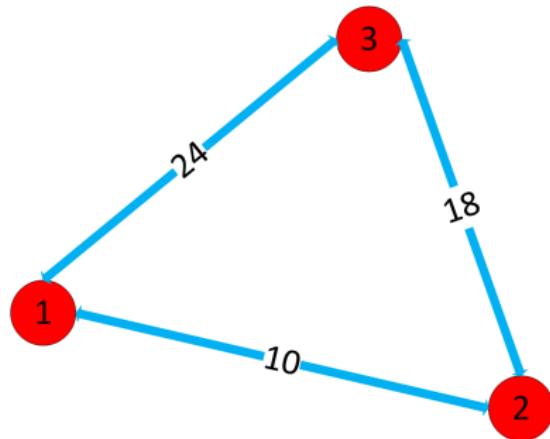
¹Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

²Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

18. 10. 2017

Polinomska optimizacija (POP)

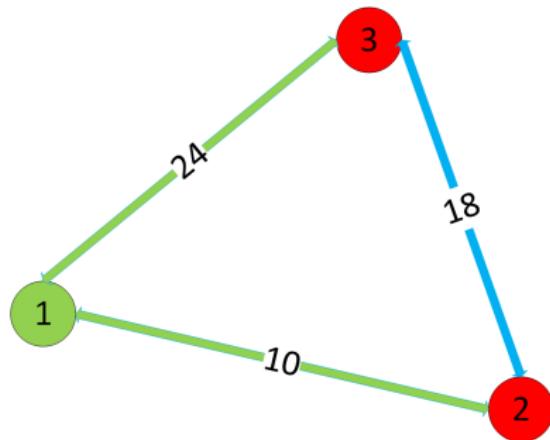
Problem maksimalnega prereza



$$x_1 = x_2 = x_3 = -1, \\ \text{prerez} = 0$$

Polinomska optimizacija (POP)

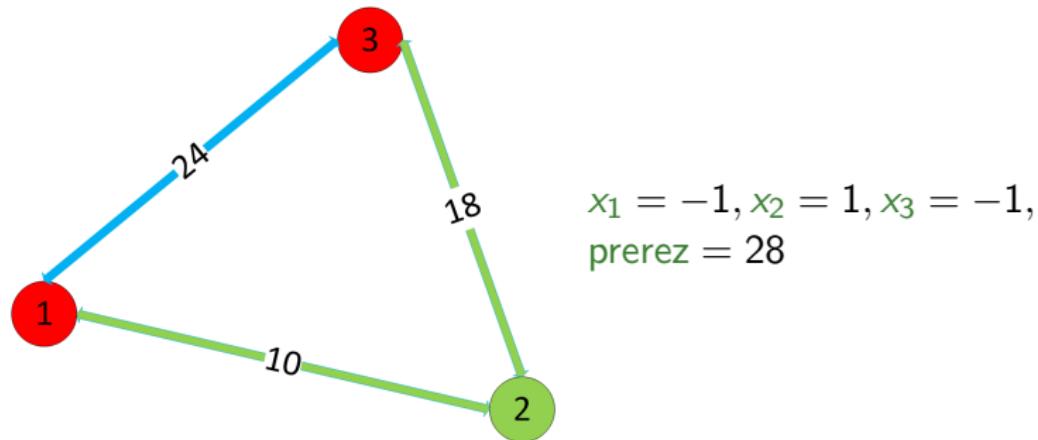
Problem maksimalnega prereza



$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = -1, \\ \text{prerez} = 34$$

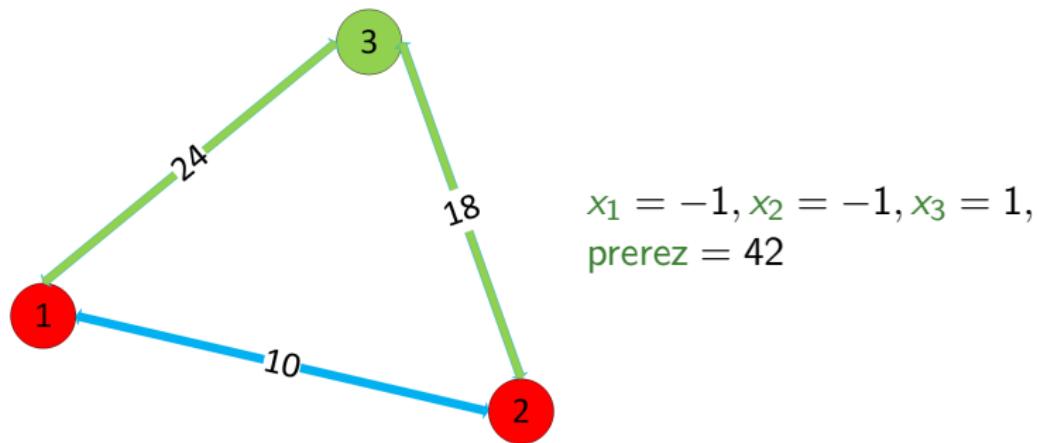
Polinomska optimizacija (POP)

Problem maksimalnega prereza



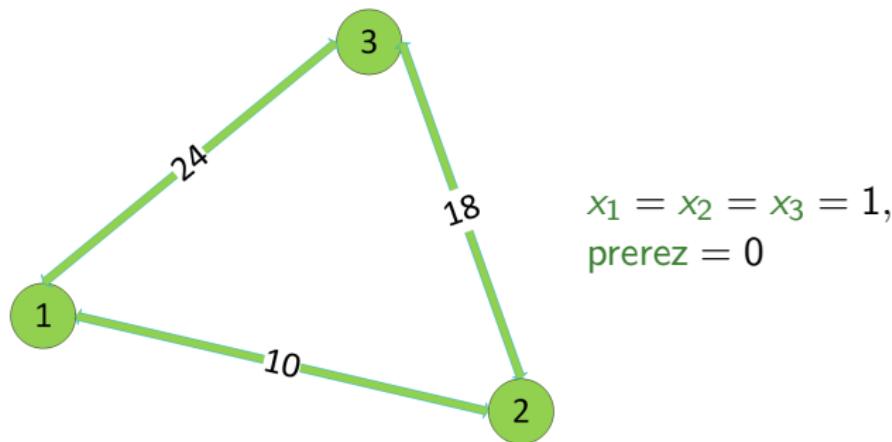
Polinomska optimizacija (POP)

Problem maksimalnega prereza



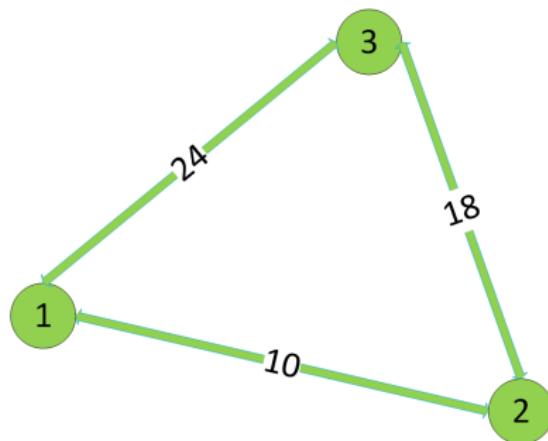
Polinomska optimizacija (POP)

Problem maksimalnega prereza



Polinomska optimizacija (POP)

Problem maksimalnega prereza



$x_1 = x_2 = x_3 = 1$,
prerez = 0

Matematična formulacija

$$\begin{aligned} \max \quad & 10(1 - x_1 x_2)/2 + 24(1 - x_1 x_3)/2 + 18(1 - x_2 x_3)/2 \\ \text{p.p.} \quad & x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1 \end{aligned}$$

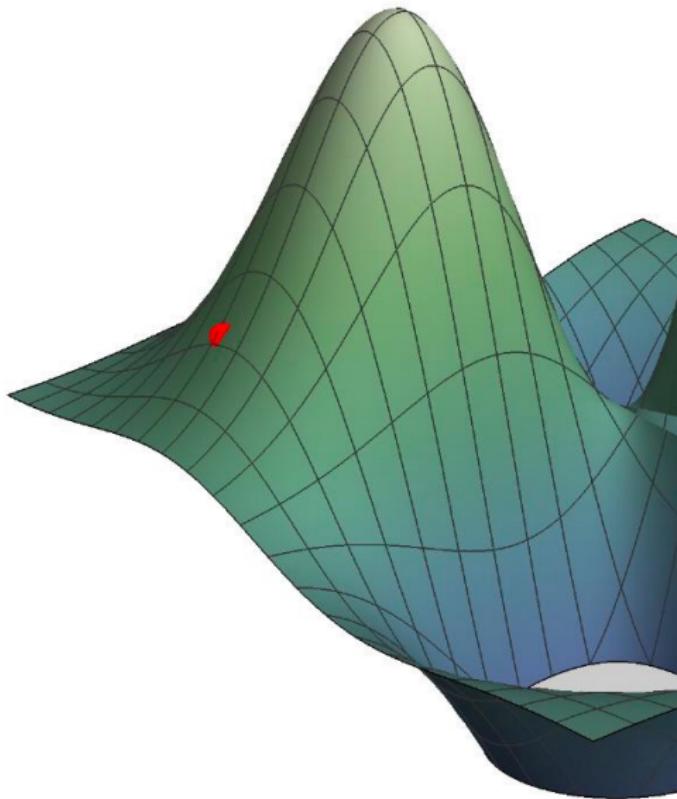
Mimogrede

NP-težki problemi

- Če bi imeli $n = 100$ točk, je cca. $2^{100} = 1,27 \cdot 10^{30}$ prerezov.
Najmočnejši superračunalnik v Evropi (Piz Daint): 250 mio let.

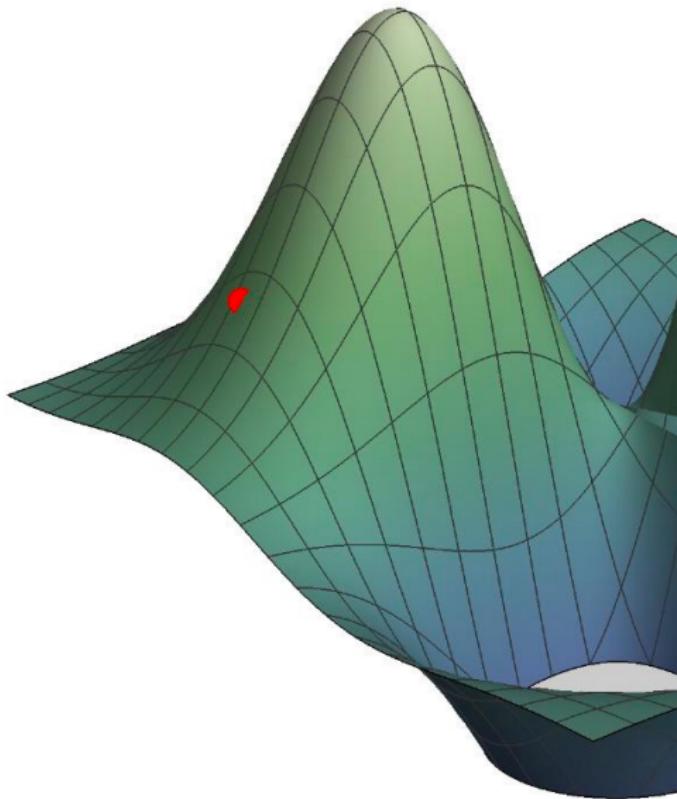
Polinomska optimizacija (POP)

Matematik plezalec – ali kako deluje matematična optimizacija



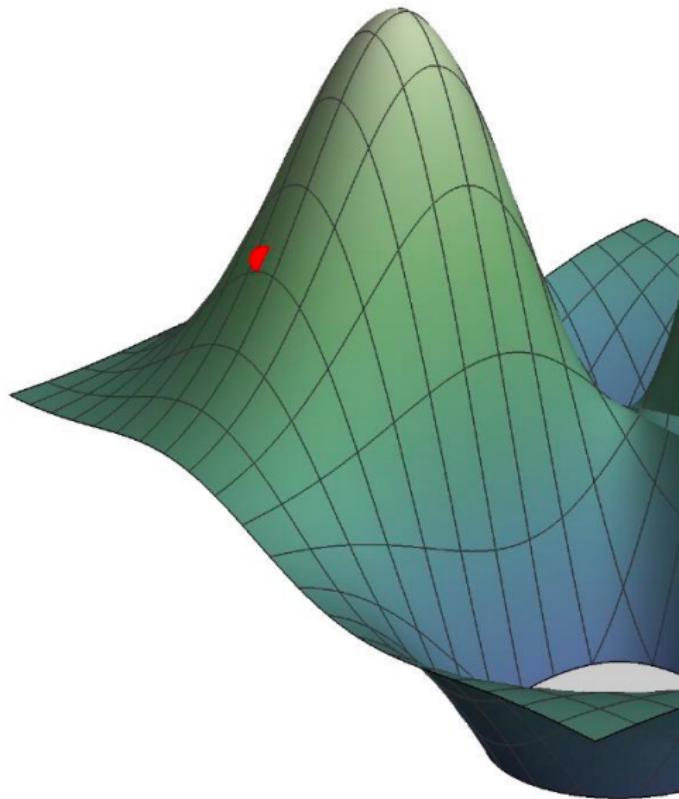
Polinomska optimizacija (POP)

Matematik plezalec – ali kako deluje matematična optimizacija



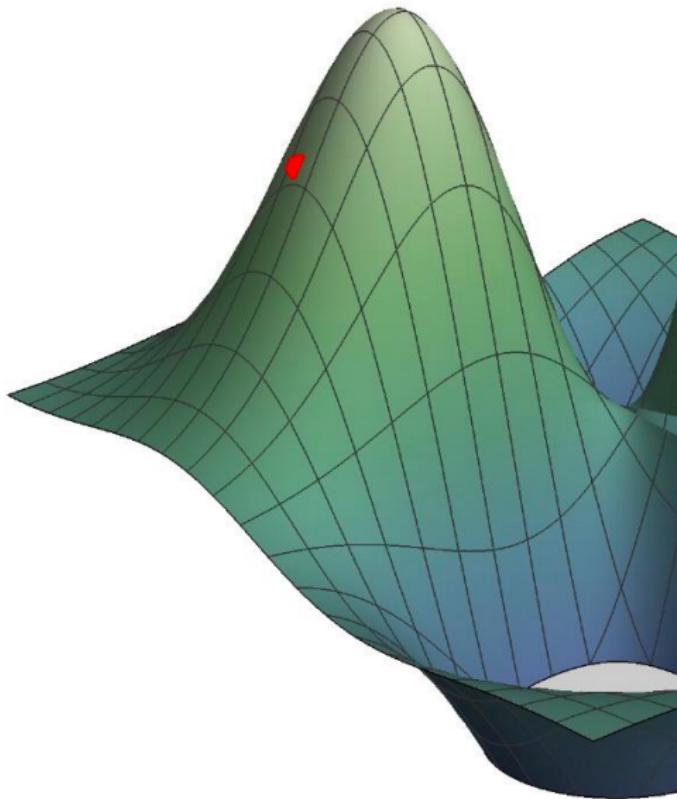
Polinomska optimizacija (POP)

Matematik plezalec – ali kako deluje matematična optimizacija



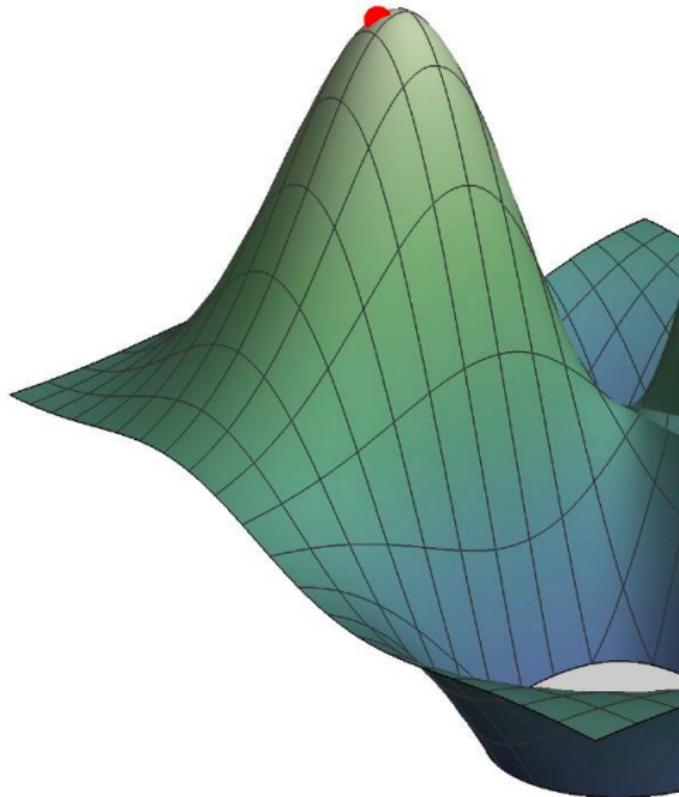
Polinomska optimizacija (POP)

Matematik plezalec – ali kako deluje matematična optimizacija



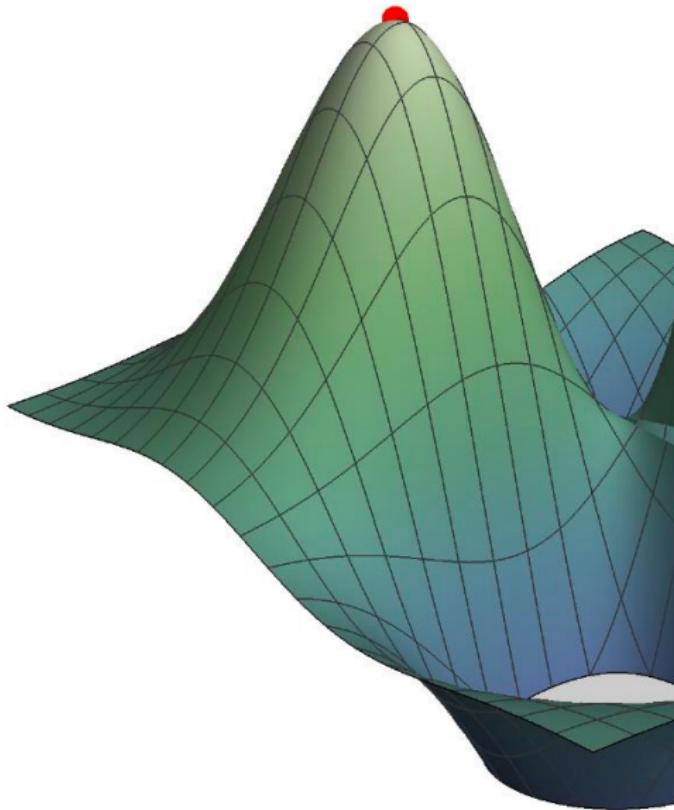
Polinomska optimizacija (POP)

Matematik plezalec – ali kako deluje matematična optimizacija



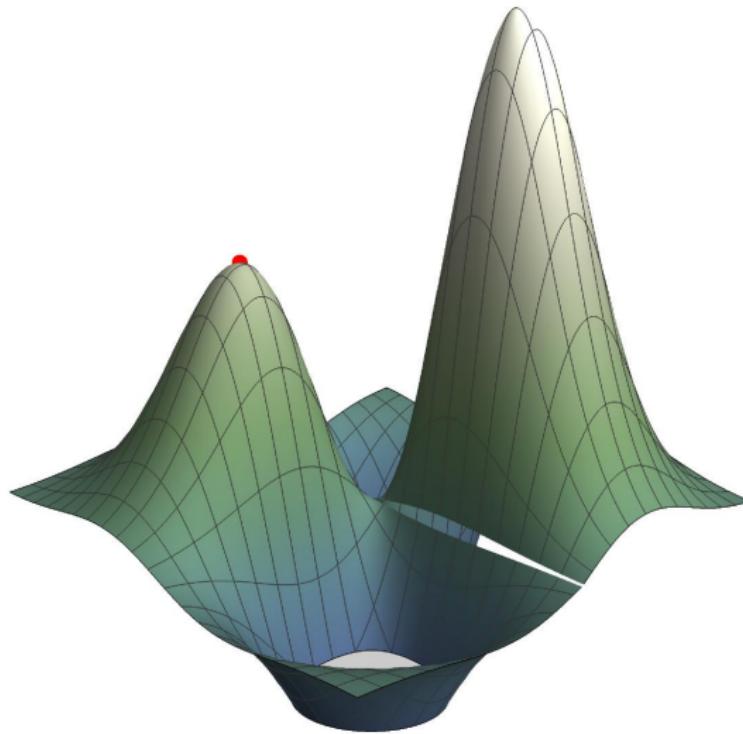
Polinomska optimizacija (POP)

Matematik plezalec – ali kako deluje matematična optimizacija



Polinomska optimizacija (POP)

Matematik plezalec – ali kako deluje matematična optimizacija



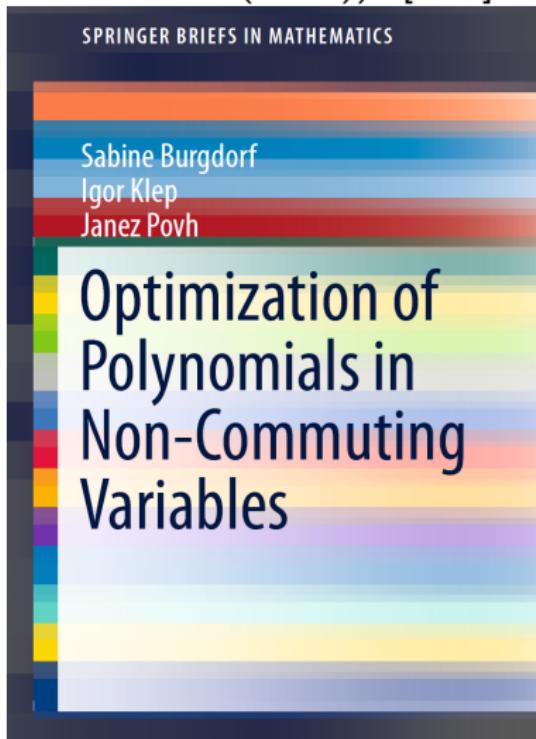
Dva izstopajoča rezultata v 2016

- HELTON, J. William, KLEP, Igor, MCCULLOUGH, Scott. Matrix convex hulls of free semialgebraic sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, ISSN 0002-9947, 2016, vol. 386, no. 5, str. 3105-3139.



Dva izstopajoča rezultata v 2016

- BURGDORF, Sabine, KLEP, Igor, POVH, Janez. Optimization of polynomials in non-commuting variables, (SpringerBriefs in mathematics (Print)). [S. l.]: Springer, 2016.



Metoda konveksnega dviga

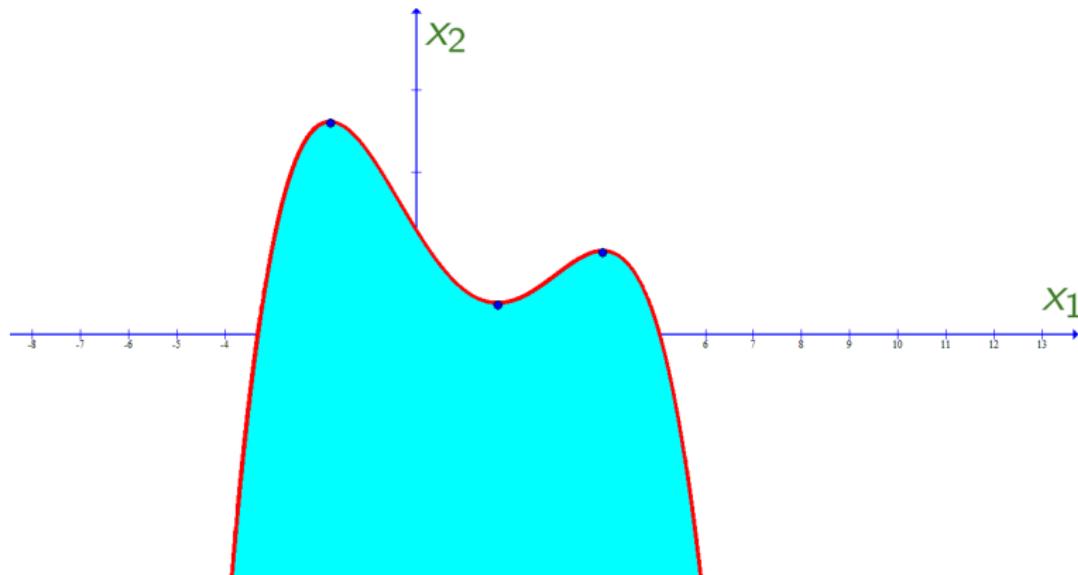
$$\begin{aligned} \max \quad & (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1) \\ \text{p.p.} \quad & x_1 \in [-4, 6] \end{aligned}$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

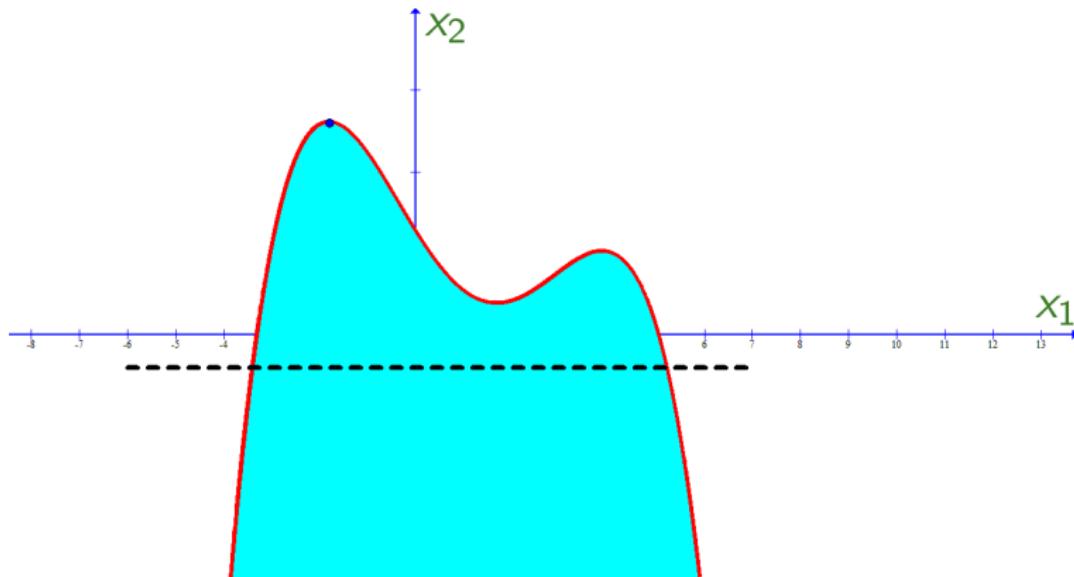
$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

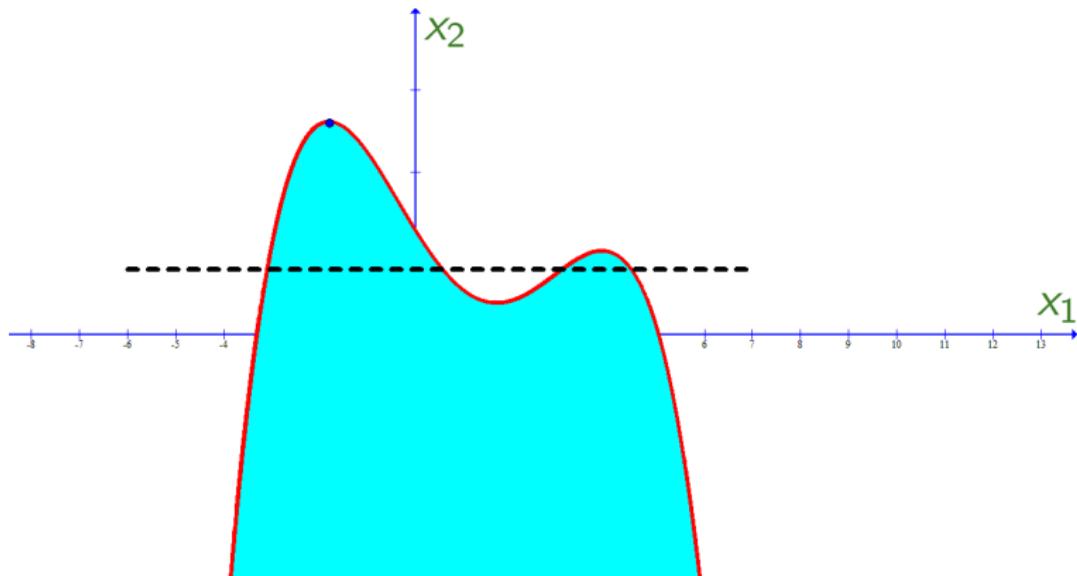
$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

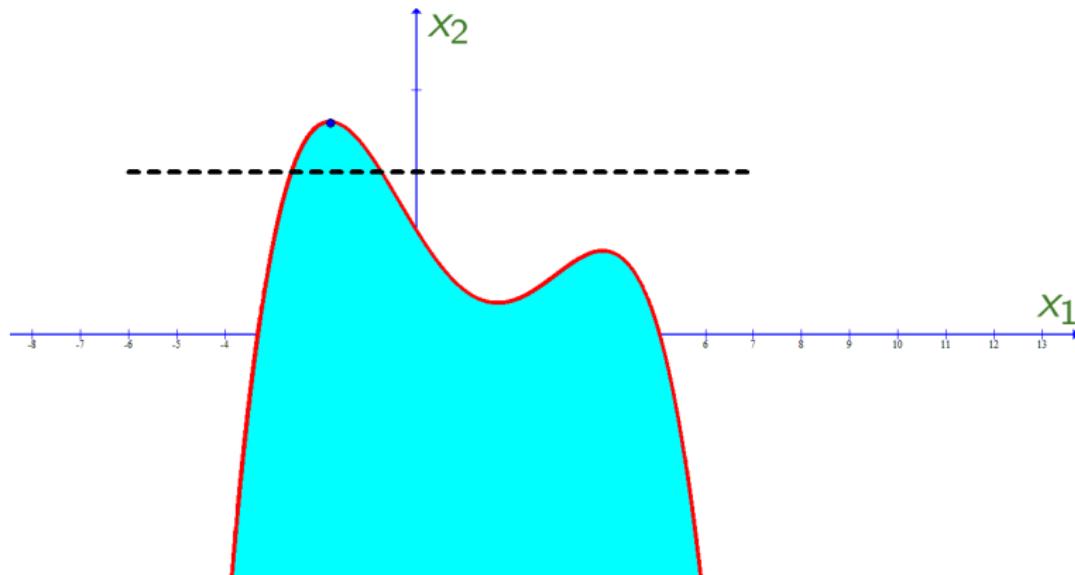
$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

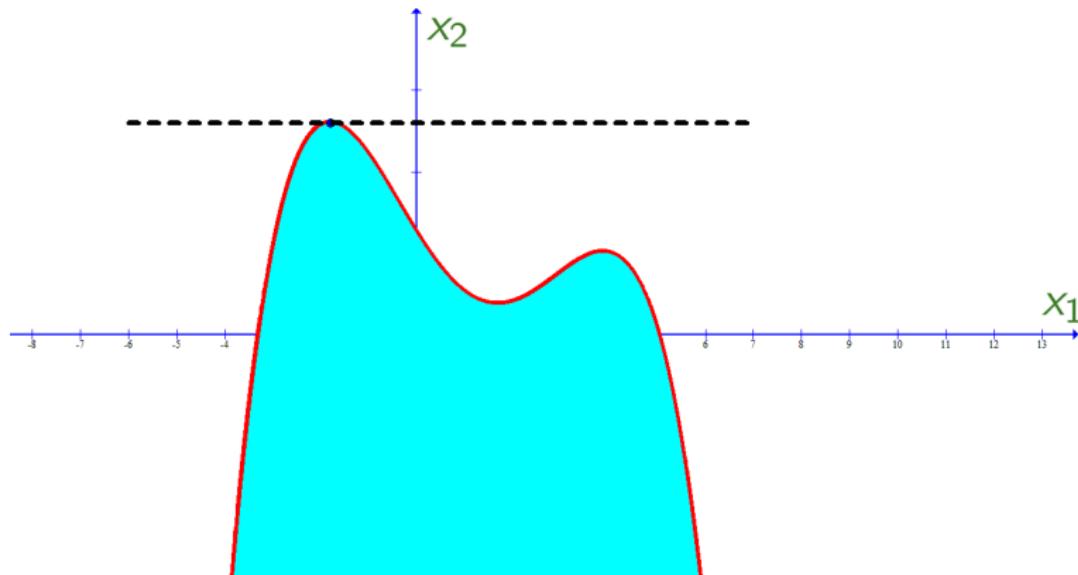
$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

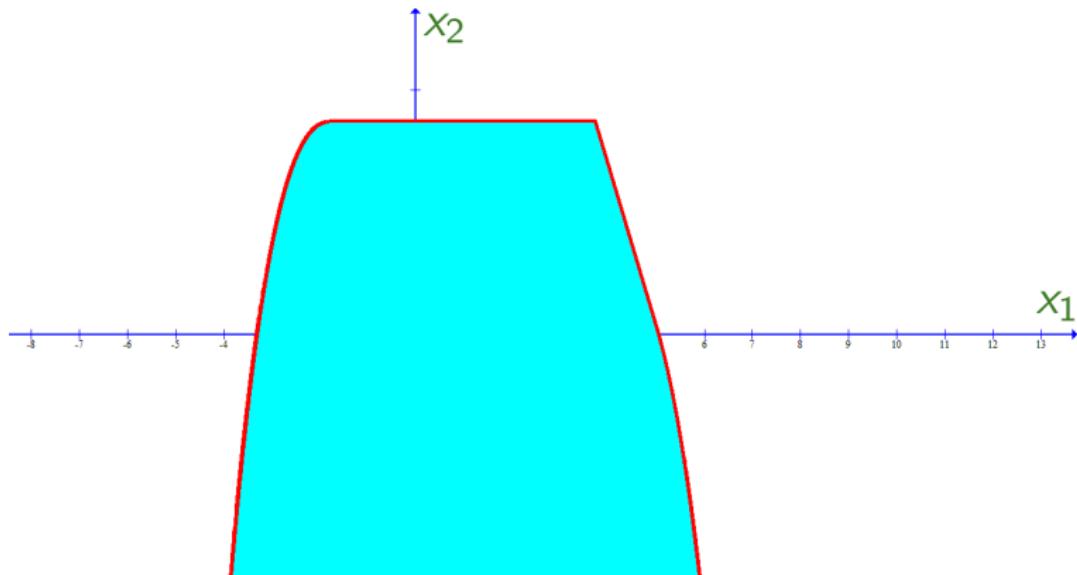
$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

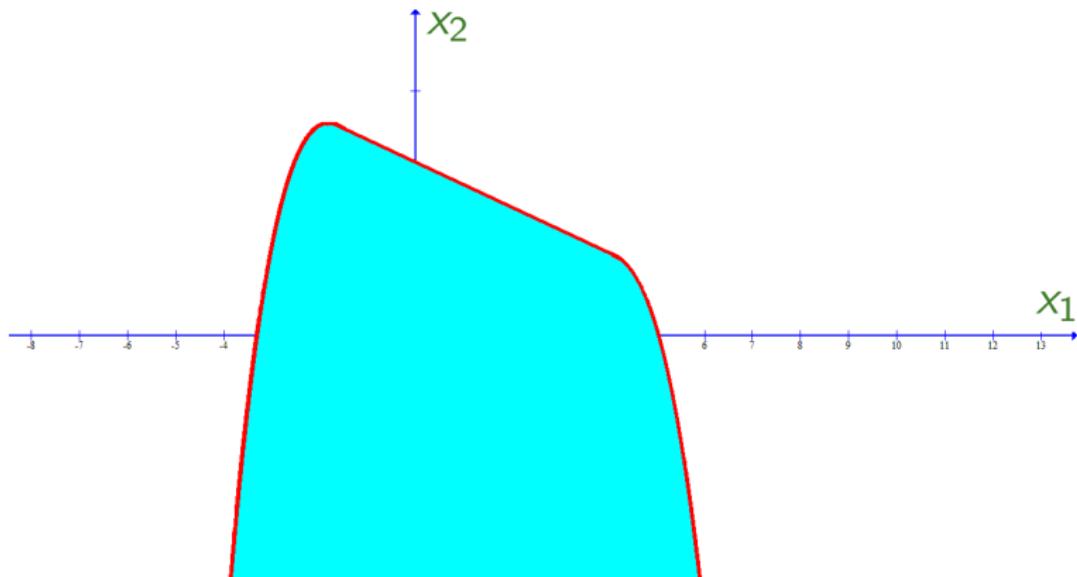
$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

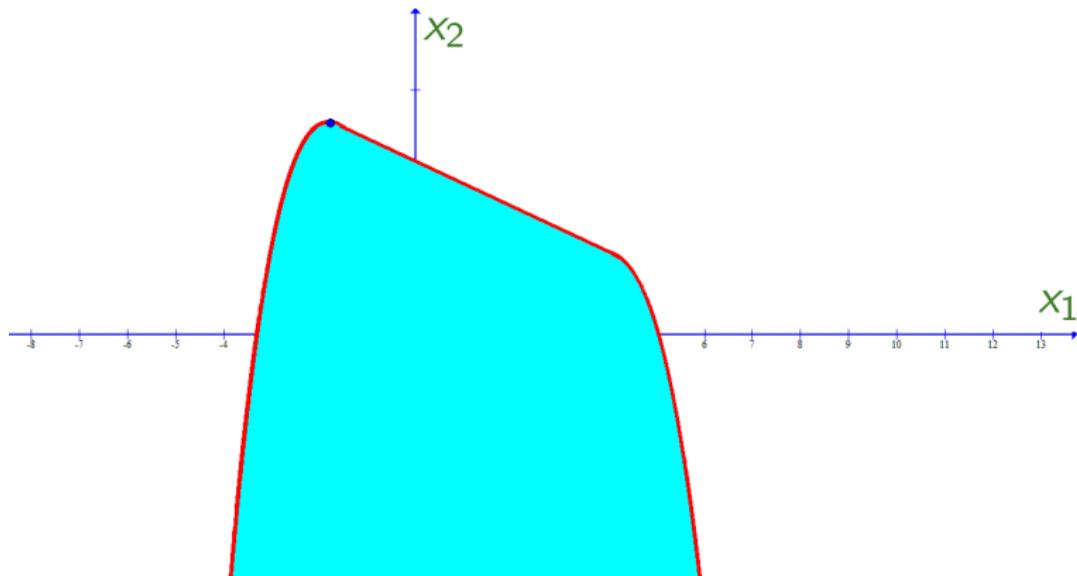
$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Metoda konveksnega dviga

$$\max \quad x_2$$

$$\text{p.p.} \quad x_2 \leq (-x_1^2 + x_1 - 12)(x_1^2 - 4x_1 + 1)$$
$$x_1 \in [-4, 6]$$



Nekomutativni polinomi

Svet ni nujno komutativen.

Metoda konveksnega dviga dobro deluje na nekomutativnih polinomih:
optimizacija lastnih vrednosti, optimizacija sledi:

$$f = 2 - X^2 + XY^2X - Y^2$$

Ekipa



Igor Klep

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani



Janez Povh

Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani



Jurij Volčič

Oddelek za matematiko, Ben-Gurion University of the Negev, Izrael



Špela Špenko

Oddelek za matematiko, Vrije Universiteit Brussel, Belgija



Klemen Šivic

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani



Kristijan Cafuta

Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani



Aljaž Zalar

Fakulteta za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani